696. Lie 環ノ derivation II

吉田　耕作（阪大）

finite rank ノ Lie 環 $\mathfrak{R}$ ガ単純 ideal ノ直和ナリトスル: $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2+\cdots\cdots+\mathfrak{R}_k$. $\mathfrak{R}_i$ ノ中ノ幾ツカハ可換（rank 1）デアリ、残リハ準単純デアル（rank >1 ナル単純 Lie 環ハ準単純）。故ニ $\mathfrak{R}$ ハ準単純ナ ideal $\mathfrak{h}$ ト核心 $\mathfrak{z}$ トノ直和ニナル: $\mathfrak{R}=\mathfrak{h}+\mathfrak{z}$.

Lemma 3. $\mathfrak{R}=\mathfrak{h}+\mathfrak{z}$ ガ Lie 環 $\mathfrak{S}$ ノ部分環ナリトスル。$x\in\mathfrak{S}$ ガ $[x,\mathfrak{R}]\subseteq\mathfrak{R}$ ヲ満足スルトスルト，此ノ x ニ對シテ

$$[x-x_1,\mathfrak{h}]=0$$

ヲ満足スル如キ $x_1\in\mathfrak{h}$ ガ unique ニ定ル。

証明: 先ヅ $\mathfrak{h}=\mathfrak{R}^2$ デアル。即チ $\mathfrak{h}$ ノ任意ノ要素ハ $[y,z]$ $(y,z\in\mathfrak{R})$ ノ如キモノノ一次結果トシテ得ラレル。何者、$\mathfrak{R}^2=\mathfrak{h}^2$ ダカラ $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}^2$ ヲ示ストヨイガ; $\mathfrak{h}$ ノ ideal $\mathfrak{h}^2$ ガ $\mathfrak{h}$ ニ一致シナイトスルト $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}^2$ ガ可換ナ

事カラ準単純ナ $\mathfrak{h}$ ガ可換 ideal $\neq 0$ ヲ含ムコトニナッテ不合理ダカラ。

猶ナ x ト $\mathfrak{R}$ トハ $\mathfrak{S}$ ノ部分環 $\mathfrak{R}'$ ト generate シ $\mathfrak{R}$ ハ $\mathfrak{R}'$ ノ ideal ニナル。従ッテ $T_x\cdot y=[x,y]$, $y\in\mathfrak{R}$ ナル T_x ハ $\mathfrak{R}$ ノ derivation。然ラバ

$T_x\cdot[y,z]=[T_x\cdot y,z]+[y,T_x\cdot z]$ ニヨッテ $T_x\cdot\mathfrak{h}^2\subseteq\mathfrak{h}$。即チ T_x ハ $\mathfrak{R}^2=\mathfrak{h}^2=\mathfrak{h}$ ノ derivation ニナル。$\mathfrak{h}$ ガ準単純ダカラ

$$T_x\cdot y=[x_1,y],\quad y\in\mathfrak{h}$$

ナル如キ $x_1\in\mathfrak{h}$ ガ存在スル（定理1ニヨル）。x_1 ガ unique ニ定ルコトハ $\mathfrak{h}$ ノ核心 $=0$ ナルコトカラワカル。　——了リ——

定理4. 準単純ナ $\mathfrak{R}$ ガ Lie 環 $\mathfrak{S}$ ノ部分環ナルトキ $\mathfrak{R}$ ヲ ideal ニスル如キ maximal subring of $\mathfrak{S}$ ヲ $\mathfrak{R}'$ トスルト

$$\begin{cases}\mathfrak{R}'=\mathfrak{R}+\mathfrak{R}_1 & \text{（直和）}\\ \mathfrak{R}_1\ \text{ハ}\ \mathfrak{S}\ \text{ノ要素デ}\ \mathfrak{R}\ \text{ノ各要素ト可換ナモノ全体。}\end{cases}$$

次ニ $\mathfrak{S}$ ト行列ノ Lie 環トスル，$\mathfrak{S}$ ノ部分環 $\mathfrak{R}$ ガ完全可約ナリトスル：$\mathfrak{R}$ ヲ reduce したと考へて

$$\mathfrak{R}=\begin{Vmatrix}\mathfrak{R}_1 & & \\ & \mathfrak{R}_2 & & 0\\ & 0 & \ddots & \\ & & & \mathfrak{R}_k\end{Vmatrix},$$

$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \cdots = \mathcal{R}_{k_1}$, $\mathcal{R}_{k_1+1} = \mathcal{R}_{k_1+2} = \cdots = \mathcal{R}_{k_2}$, ……,

$\mathcal{R}_{k_{m-1}+1} = \mathcal{R}_{k_{m-1}+2} = \cdots = \mathcal{R}_{k_m} = \mathcal{R}_k$ トシ且ツ $\mathcal{R}_{k_i}$ ハ

$\mathcal{R}_{k_j}$ $(i \neq j)$ = <u>*inequivalent*</u> トス。$\mathcal{R}_i$ ハ<u>既約</u>ナ

Lie 環ダカラ (*Cartan* ノ定理)

$$\begin{cases} \mathcal{R}_i = \mathcal{R}_i^2 + \mathfrak{z}_i, & \mathcal{R}_i^2 \text{ 準単純} \\ \mathfrak{z}_i = \text{単位行列 } E_i \text{ ノ常数倍ノ形ノモノノミヨリ成} \end{cases}$$

ル。

故ニ[(1)] $\mathcal{R} = \mathcal{R}^2 + \mathfrak{z}$, $\mathcal{R}^2$ ハ準単純且ツ核心 $\mathfrak{z}$ ハ

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 E_1 & & & \\ & \alpha_2 E_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \alpha_k E_k \end{Vmatrix}$$

ノ形デ、コヽニ $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{k_1}$, $\alpha_{k_1+1} = \alpha_{k_1+2} = \cdots\cdots$

$= \alpha_{k_2}$, $\alpha_{k_{m-1}+1} = \alpha_{k_{m-1}+2} = \cdots = \alpha_{k_m} = \alpha_k$.

　　今 $X \in \mathfrak{S}$ ガ $[X, \mathcal{R}] \subseteq \mathcal{R}$ ヲ満足スルトセバ上ノ

Lemma カラ $X = X_1 + Z$, $X_1 \in \mathcal{R}^2$, $Z \in \mathfrak{S}$ デ $[Z, \mathcal{R}^2]$

$= 0$。所ガ $\mathcal{R}_i$ ハ何レモ *irreducible* ダカラ *matric*

algebra ノ一般論カラ斯ル Z ハ又明ニ $[Z, \mathfrak{z}] = 0$ ヲ満

足シ従ッテ $[Z, \mathcal{R}] = 0$.

　　故ニ

---

(1) $\mathcal{R}_i^2$ ノ行列ハ全テ *Spur* 0 ナコトニ注意。

定理5. 完全可約ナ matric Lie 環 $\mathfrak{R}$ ガ與ヘラレタ時ニ $\mathfrak{R}$ ヲ ideal トシテ含ムマシナ maximal matric Lie 環 $\mathfrak{R}'$ ハ

$$\begin{cases} \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}^2 + \mathfrak{R}_1 \ (\text{直和}) \\ \mathfrak{R}_1 \text{ハ} \mathfrak{R} \text{ノ全テノ要素ト可換ナ行列ノ全体。} \end{cases}$$

注意. H. Zassenhaus ノ Gruppentheorie ノヲ見テ居リマシタラ, P. 42

其ノ核心ガ單位要素ノミヨリナリ、且ツ其ノ automorphism group ガ inner automorphism group ト一致スル如キ群ヲ abgeschlossen デアルト呼ビ且

可換デナイ單純ナ群ノ automorphism group ハ abgeschlossen ナコトヲ示シテアリマシタ。

定理3ト密接ナ關係ガアル訳デアリマス。